第五章 集合的基數（Cardinality of Sets）

5.1 等價集合（equivalent sets）

假如有人問你教室裡有多少人時，你會很自然的去數人數。仔細思考「數數」的動作，就是把教室裡的每個人分配到一個（唯一的）數字上。若又有人問你教室裡的人數是否比隔壁教室裡的人數多時，分別數過後再比較兩個數字，你便可以輕鬆地回答這問題。

現在讓我們把注意力放到整數和自然數上。當中哪個集合的元素個數比較多？而這實際上代表的是什麼意思？比起你曾思考過的問題，要精確的回答這問題是有點難的。以下這個數學小故事（據說是由希爾伯特(Hilbert)所給的）說明了這個問題的關鍵以及解決辦法。

「無限大飯店」裡有“ 無窮多 ”個房間。某天，當台維斯盃網球賽某參賽隊伍的教練抵達飯店時，飯店房間早已客滿。機伶的飯店經理爲了安頓教練，就請所有的客人搬到比原房號多一號的房間，這樣一來就清出了一號房給教練。緊接著，隊上四位參賽選手也到了飯店。理所當然的，每一位都必須有一間專屬房間。這時非常機伶的經理就又請所有房客往後搬四個房間，好騰出足夠的房間給四位選手。最後，球隊數不盡的死忠球迷進駐飯店。這位非常非常機伶的經理爲了照顧所有的客人，就請在 n 號房裡的房客搬到 $2n$ 號房裡。現在，所有新來的人就可以住進奇數號房裡了。

「無限大飯店」的故事到底要告訴我們什麼？接下來幾段的目標就是要探討並回答以上這些問題。

要正確的解釋兩個集合(甚至是兩個無限集合)擁有“ 一樣多 ”的元素，我們需要下面的定義：

定義

若集合 A 與集合 B 間存在一個對射函數 $f: A \to B$ ，則稱集合 A **等價於(is equivalent to)**集合 B，記作 $A \approx B$ 。

定理 1 令 X 爲一非空集合， A, B 與 C 爲 X 的非空子集。

(a) $A \approx A$ 。

(b) 若 $A \approx B$ ，則 $B \approx A$ 。

(c) 若 $A \approx B$ 且 $B \approx C$ ，則 $A \approx C$ 。

證明：習題。

因爲「$\approx$」這關係是對稱的，所以我們通常較說 A 與 B 是同價的，而不說 A 同等價 B。

國立交通大學理學院 應用數學系 白啓光老師

例：$(0,1) \approx (0,3)$ 。

證明：
定義函數 $f:(0,1) \to (0,3)$ 為 $f(x)=3x$。證明 f 是對射函數的工作留給各位完成，然後由此推得 $(0,1) \approx (0,3)$ 。

定義
我們稱集合 S 是**有限的(finite)**，若且唯若 $S=\phi$ 或 存在正整數 n 使得 S 等價於集合 $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ 。若一個集合不是有限的，則我們說此集合是**無限的**（**infinite**）。

因此，要證明一個非空集合是有限的，我們得在 S 與某個 $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ （ $n \in \mathrm{Z}^+$ ）這兩個集合間找一個對射函數。因為「 $\approx$ 」是對稱的，所以兩集合中任一個都可以作為定義域；而這個對射函數，就是一般計數方式的數學表示法。而若要證明一個集合 S 是無限的，我們必須證明 S 非空且對於任何的正整數 n ，都不存在從 S 送到 $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ 的對射函數。

有限集合有些怎樣的例子？根據我們的定義，對於任何的正整數 n，集合 $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ 都是有限集合。

例：那集合 $\{2, 4, 6\}$ 呢？
註：這也應該是有限的，不過要證明 $\{2, 4, 6\}$ 是有限的，我們得建立一個對射函數。
證明：
令 $f:\{1, 2, 3\} \to \{2, 4, 6\}$ 定義為 $f(n)=2n$ 。

當然，你也可以考慮函數 $g:\{1, 2, 3\} \to \{2, 4, 6\}$ 定義為 $g(1)=4$ 、 $g(2)=6$ 以及 $g(3)=2$ 。事實上，如果我們的集合有多個元素，那麼我們的對射函數也就有多個選擇。

定理 2 $\mathrm{Z} \approx \mathrm{N}$ 。
這個定理實際上就是「飯店無限大」這故事背後隱藏的要點。一個無限集合 **Z** 的確可以包含一個子集 **N**，而這子集卻和 **Z** 有“ 一樣多 ”的元素！

證明：
定義 f： $\mathbf{Z} \to \mathbf{N}$ 為

$$f(x)=\begin{cases} 2(x+1) & if\ \ x \geq 0 \\ -(1+2x) & otherwise \end{cases}$$

之前，我們已經證明過這是個對射函數(請參閱 3.2 講義)。由此可得 $\mathrm{Z} \approx \mathrm{N}$ 。