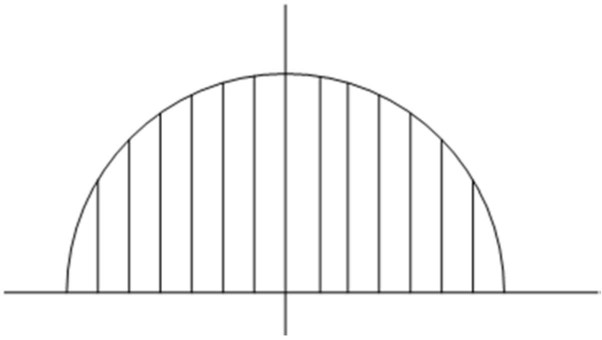
§5-1 Areas and Distances

＊Question

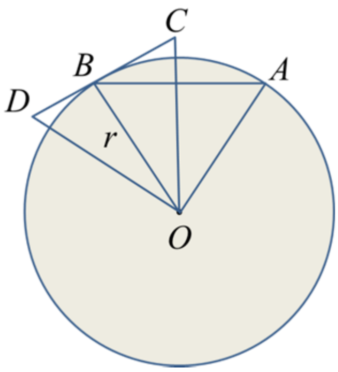
How to find the area of a region whose boundary does not consist of just line segment?

＊Answer

一般的作法：$\sum$ 小長方形，小長方形的底都在 x 軸上。



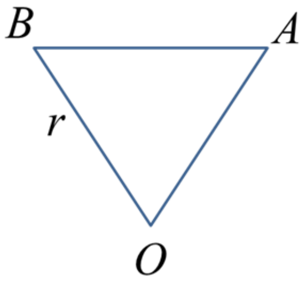
Example 1：Evaluate the area of a circle with radius r.



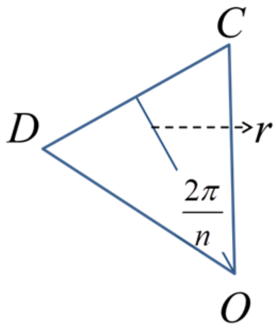
Solution：

想法：將圓形分為許多小三角形，然後利用夾擊。

國立交通大學應用數學系 莊重教授



下界：內接正 n 多邊形 (S_n)



上界：外切正 n 多邊形 (T_n)

$$S_n = \frac{n}{2} r^2 \sin\frac{2\pi}{n} \to \pi r^2 \text{ 當 } n \to \infty .$$

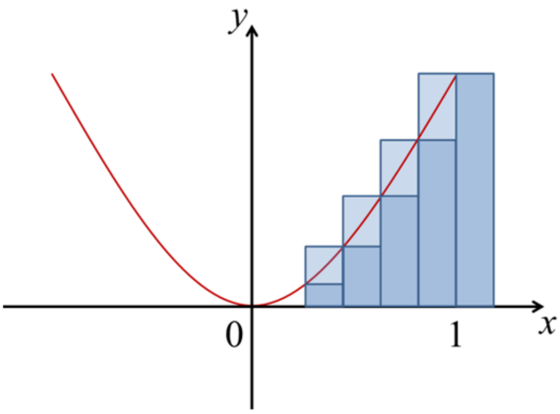
$$T_n = nr^2 \tan\frac{\pi}{n} \to \pi r^2 \text{ 當 } n \to \infty .$$

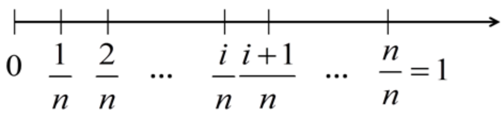
$$\Rightarrow A = \pi r^2 .$$

Example 2：Evaluate the area under the curve $f(x) = x^2$ on [0 , 1].

Solution：

想法：將此區域分成許多小長方形，然後利用夾擊。





國立交通大學應用數學系 莊重教授

把 [0 , 1] 分成 n 等分。假設 $S=$ exact area

因為 x 在[0 , 1]是遞增的，所以 $\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{i}{n}\right)<S<\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{i+1}{n}\right)$

但 $\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{i}{n}\right)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i^2}{n^3}=\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6n^3}\to\frac{1}{3}$ 當 $n\to\infty$.

$\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{i+1}{n}\right)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(i+1)^2}{n^3}=\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n^3}=\sum_{i=1}^{n}\frac{(n)(n+1)(2n+1)}{6n^3}\to\frac{1}{3}$ 當 $n\to\infty$.

$\Rightarrow S=\frac{1}{3}$.

∗Summary：irregular area

=∑ regular areas

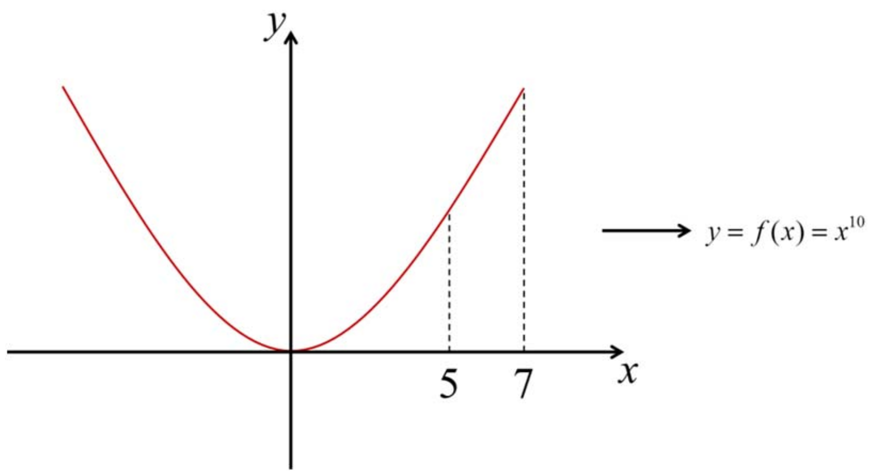
=∑ 小長方形

=∑ 小三角形

Example 3：Determine a region whose area is equal to the given limit as follows：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n}\left(5+\frac{2i}{n}\right)^{10}.$$

Solution：




面積
積分
TFTC
反導數