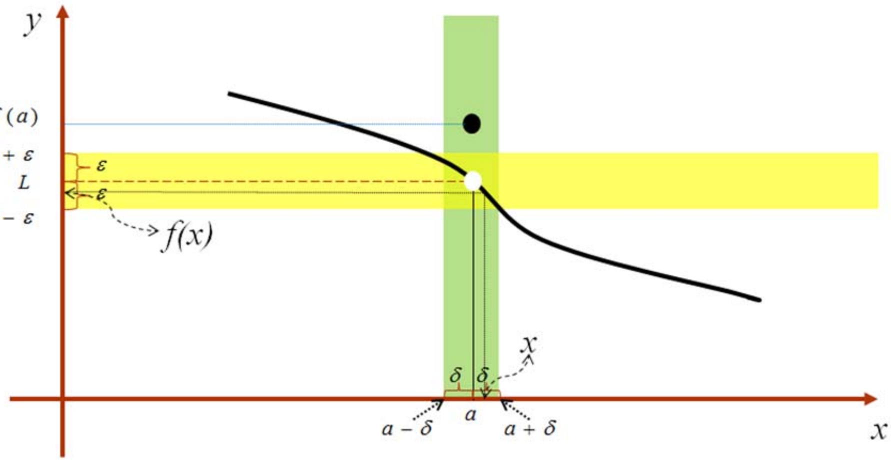
§2-4 Definition of the Limit

＊如果當 x 越來越接近 *a*(但不等於 *a*)，則 *f*(*x*)越來越接近 *L*，則我們說

$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = L}$

以上概念如何用嚴謹的數學表達呢？

$\lim_{x\to a} f(x) = L$



Definition：$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \iff$

Given $\varepsilon > 0$, there exists a $\delta > 0$ such that s.t.

if $0 < |x - a| < \delta$, then $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Remarks：(i) ε是任意先給，要多小就可給多小。

(ii) 給 L 的任一小的近旁（附近）($|f(x) - L| < \varepsilon$)，我們需找一個 a 的夠小近旁 ($0 < |x - a| < \delta$)，使得在此找到的 a 的近旁，除 a 之外，每個相對的 f (or y)值皆介於事先任意指定的 L 的近旁。

(iii) $|x - a| > 0 \Rightarrow x \neq a$.

Example 1：$\lim_{x\to 1}(5x-1)=4$

Proof by definition.

Proof ：

草稿：

從目標著手：

若 $|f(x)-L|<\varepsilon$ (L的近旁)

$|5x-1-4|<\varepsilon$

$\Rightarrow |5x-5|<\varepsilon$

$\Rightarrow |x-1|<\dfrac{\varepsilon}{5}$ (a的近旁)

Given ε , choose $\delta=\dfrac{\varepsilon}{5}$. We have that

if $0<|x-1|<\dfrac{\varepsilon}{5}$, then $|f(x)-4|=|5x-1-4|=5|x-1|<\varepsilon$

Example 2：Prove $\lim_{x\to 3}x^2=9$ by definition.

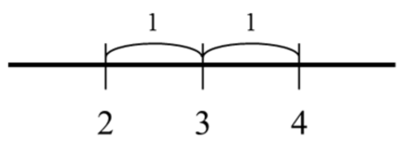
Proof：

草稿：

從目標著手：

若 $|x^2-9|<\varepsilon$

$\Rightarrow |(x-3)(x+3)|<\varepsilon$



若 $2 < x < 4$，也即 $|x-3| < 1$，

則 $|(x-3)(x+3)| < 7|x-3|$.

若 $|x-3|$ 也小於 $\frac{\varepsilon}{7}$，則 $|(x-3)(x+3)| < 7|x-3| < \varepsilon$.

Given $\varepsilon > 0$，取 $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{7}\right\} = 1$ 和 $\frac{\varepsilon}{7}$ 較小的那一數.

則 if $|x-3| < \delta$ then $|x-3| < 1$, and so $|x+3| < 7$

Hence, $|x^2 - 9| = |(x-3)(x+3)| < 7|x-3| < \varepsilon$.