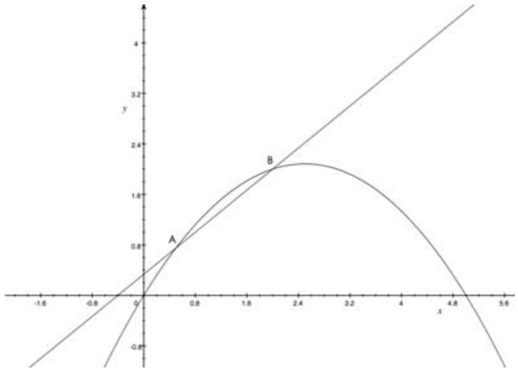
微積分

微分：描述「瞬間變化」的現象

（i）　平均速度→ 瞬間速度 (在 B 點時間的瞬間速度)

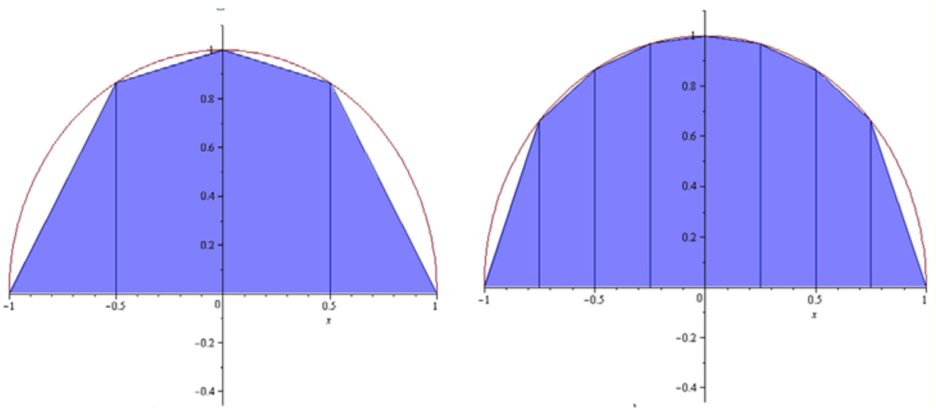
（ii）　割線斜率 $\underset{A \to B}{\longrightarrow}$ 切線斜率　(過 B 點的切線斜率)

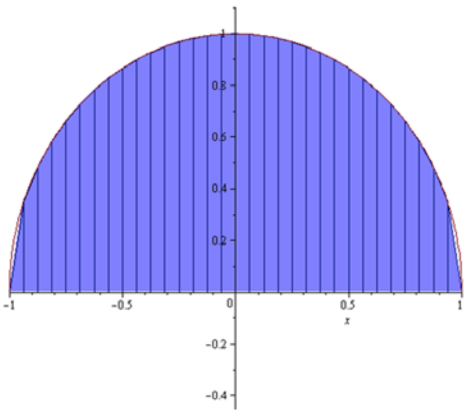


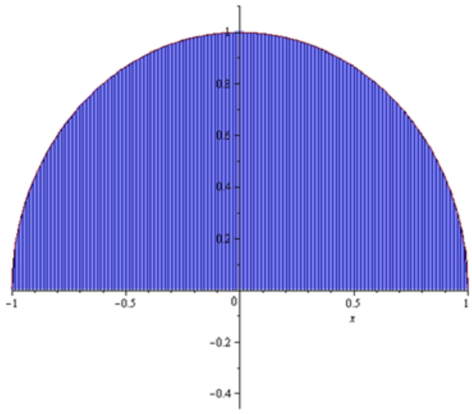
積分：描述「無窮小累加」的現象。

B：半圓的內接 n 個梯形(如下圖) $\underrightarrow{n \to \infty}$ 半圓

(每個內接梯形面積　梯形面積→0 當 $n \to \infty$)

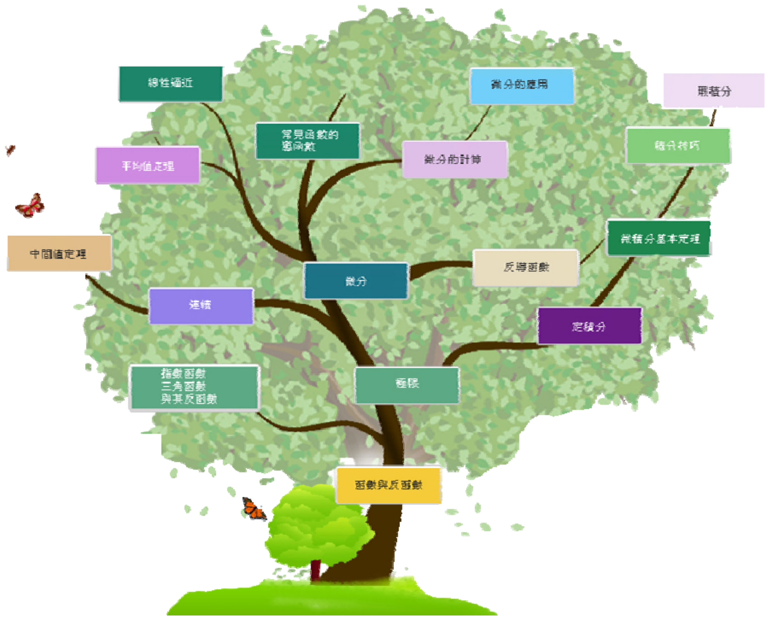






許多的 real world 中的物理、工程、經濟和生物現象，都可以用這兩種概念來精確描述，是用來處理建模(Modeling)不可或缺的概念，也是開啟現代數學分析的起點。

這些現象的描述需要函數和極限來精準的表達，因此，函數和極限可說是微積分這棵大樹的根基。

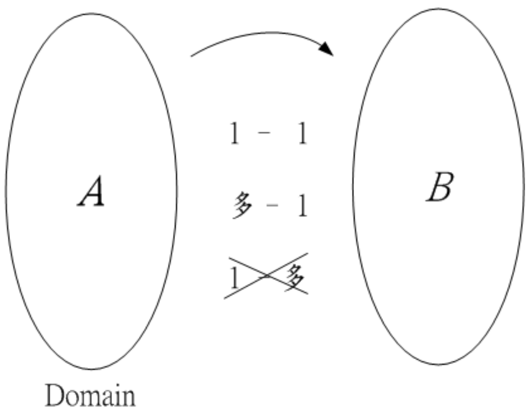


§1-5 Exponential Functions

§1-6 Inverse Functions and Logarithms

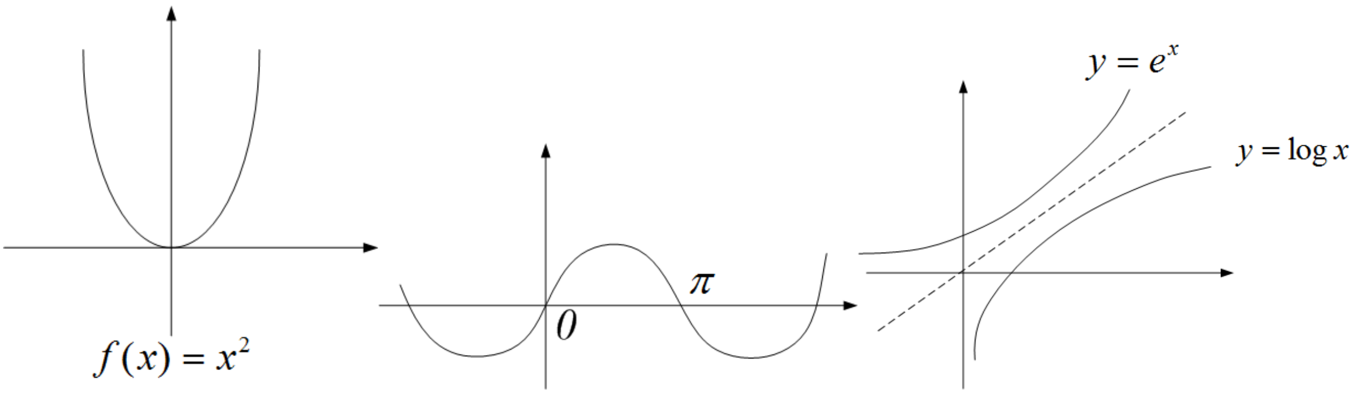
Definition of a function f: a function f is defined to be a correspondence of f between 2 sets A and B satisfying the following：

$\forall x \in A \Rightarrow \exists$! (存在唯一) $y \in B$ s.t. (使得) $f(x) = y$. Then f is called a function from A (domain) to B.

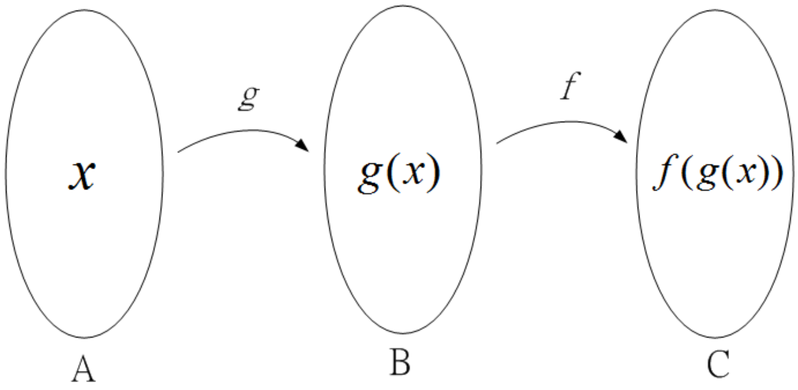


在微積分常見的函數：

Polynomials, Trigonometric functions, Exponential and Logarithm functions

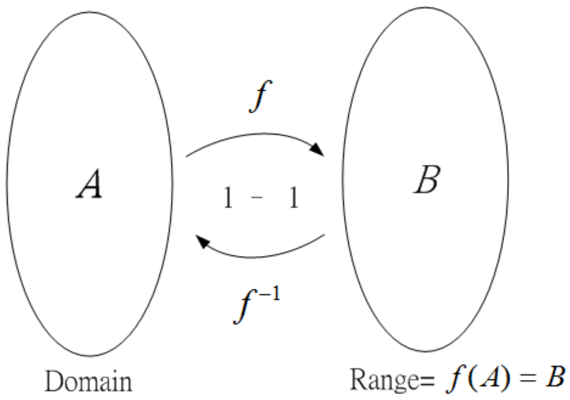


Composition of the functions f and g ： $f \circ g$



$$f \circ g(x) = f(g(x)).$$

反函數：



f^{-1} 代表 f 的反函數， f^{-1} 是反函數的符號， $f^{-1} \neq \frac{1}{f}$.

Example 1： Let $f(x) = \dfrac{4x-1}{2x+3} = y$. Find the domain and range of f and the inverse of f.

Solution： Domain $= \left\{ x \in R : x \neq -\dfrac{3}{2} \right\}$

$$\text{Let } \frac{4x-1}{2x+3} = y \Rightarrow x = \frac{1+3y}{4-2y} = f^{-1}(y).$$

$$\Rightarrow \text{Range} = \{ y \in R : y \neq 2 \}.$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1+3x}{4-2x}.$$

Example 2： $m = f(v) = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$. Find $f^{-1}(m)$. Here m_0 is mass at rest, and m is mass with speed v and c is the speed of the light.

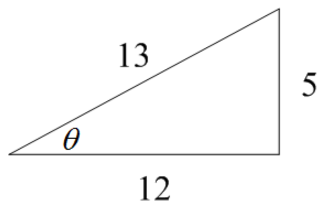
Solution： $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$.

$$\Rightarrow v = \frac{c}{\sqrt{1-\dfrac{m_0^2}{m^2}}}.$$

$$= f^{-1}(m).$$

Example 3： $\sin\left(2\sin^{-1}\dfrac{5}{13}\right) = \sin 2\theta = 2\cos\theta\sin\theta = \dfrac{120}{169}$.

Solution：



Properties of log.

(i) $\log_a a^x = x$, $x \in R$; $a^{\log a^x} = x$, $x > 0$.

(ii) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$, $x, y > 0$.

(iii) $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$, $x, y > 0$

(iv) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, $a, b > 0$.

Example 4： $\sin\left(\tan^{-1} x\right) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Example 5： $\tan^{-1}\left(\tan\frac{4\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}$.

1-5 Exponential Functions

指數函數 $f(x)=a^x,\ a>0$.

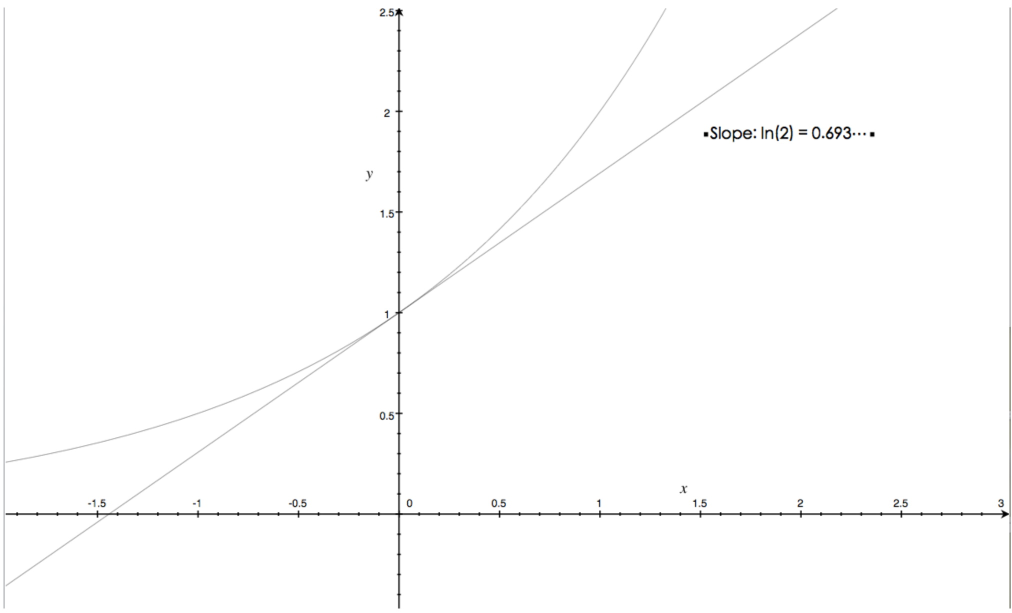
$$\begin{cases}1.\ \text{成長或衰退的非常快.}\\ 2.\ e\\ 3.\ \text{Applications}\end{cases}$$

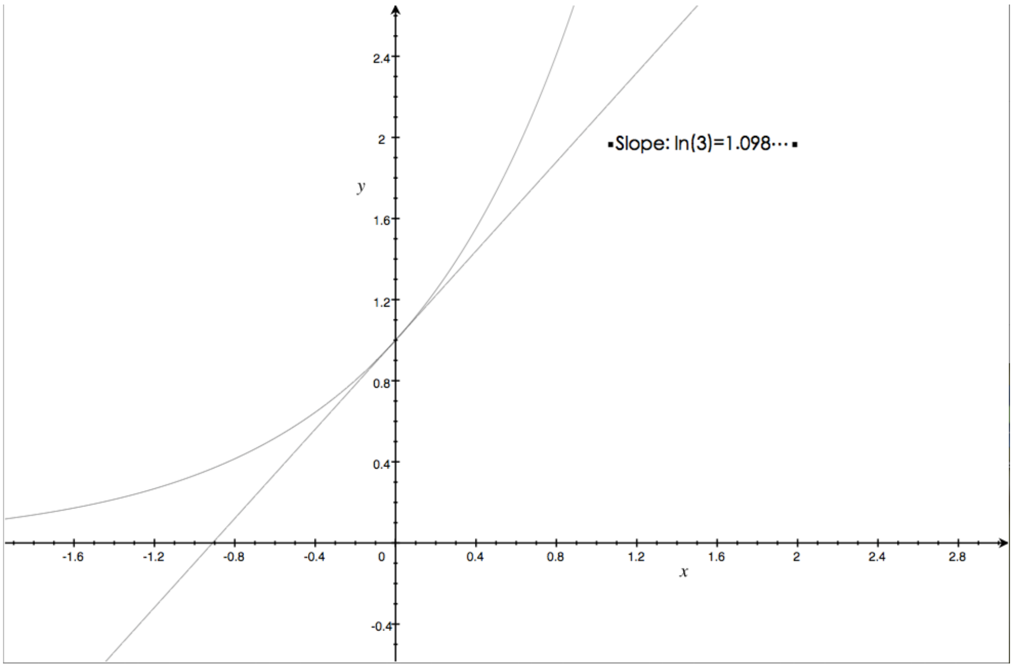
$a^3=a\cdot a\cdot a$

$a^{\frac{3}{2}}=\sqrt{a^3}$

$2^{\pi}=2^{3.14....}$

Example 6： e 這個數？





Solution：幾何上： $y=a^x$, $a>0$, 恆過 $(0,1)$ 點.

Facts：・當 $a=2$, 過 $(0,1)$ 和 $y=2^x$ 相切的切線斜率約為 0.7。

・ 當 $a=3$, 其相對的切線斜率約為 1.1。

$\Rightarrow$ 存在一實數 $a>0$, 使得其相對的切線斜率為 1.我們令此實數為 e.

此 e 為無理數約為 $e\approx 2.71828$.

Example 7：Moon-Earth 的距離約為 384,400km，我們假設為 400,000km，又一張紙的厚度設為 10^{-2} cm，請問摺幾次後紙張厚度超過 M-E 的距離？

Solution：

$$
\begin{aligned}
&k:\text{紙張摺的次數}\\
&2^k\cdot 10^{-7}>4\times 10^{-5}\\
&\Rightarrow k>2+\frac{12}{\log 2}\\
&\Rightarrow k=42
\end{aligned}
$$

Remark：當然紙張不可能摺 42 次，但這例子是告訴大家，指數的成長速度是驚人的。

Example 8：放射性元素衰退的函數

Rutherford (1871-1937) 發現放射性的元素衰退可以用指數函數來描述.

Let $p(t)$ 代表在 t 時間某個放射性元素的密度，若假設此元素的 half-life 是τ ，則可導出 $p(t)$.

Solution： $p(t) = p_0 \cdot 2^{-\frac{t}{\tau}}$

$$= p_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

Example 9：The Age of the Uranium in Our Solar System

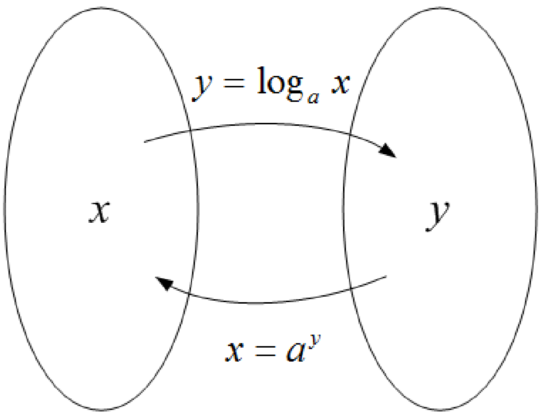
已知：(I) ^{238}U half life 4.468 GYr (1GYr $\equiv 10^9$ years)

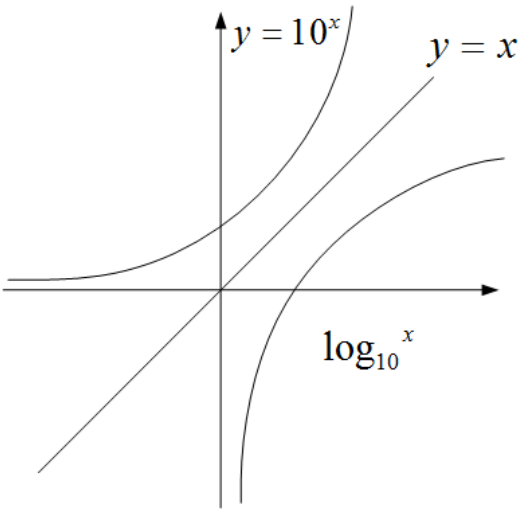
^{235}U half life 0.707 GYr

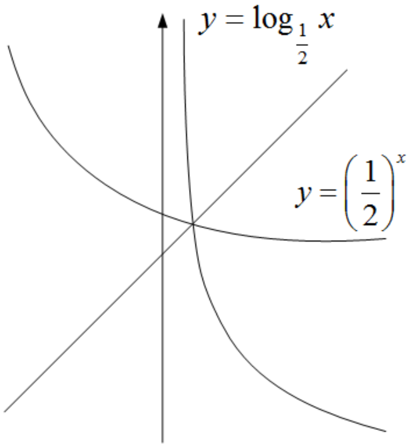
(II) $\dfrac{^{238}U(t)}{^{235}U(t)} = 137.8$ (可測量) $\dfrac{^{238}U(0)}{^{235}U(0)} \approx 1$.

問：How old is our Solar System？

對數函數： (指數函數的反函數)







(i) $\log_a a^x = x$, $x \in R$; $a^{\log_a x} = x$, $a,\ x > 0.$

(ii) $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$, $a,\ x, y > 0.$

(iii) $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$, $a,\ x, y > 0.$

(iv) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, $a, b, c > 0.$

(v) $\log_e x = \ln x$, $x > 0.$